Учет диссипации и вязкости в скоростях групповых волн в зависимости от структуры дифференциальных уравнений линейных вязко-упругих моделей

Д.А. Третьяков, А.О. Арифуллина, В.С. Хоменко, Е.Д. Мешков, Д.Б. Куатхина

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

195251, ул. Политехническая, д. 29 л. Б, вн. тер. г. муниципальный округ Академическое, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

Введение

Для описания акустоупругого эффекта в телах кристаллической структуры с 1930-х годов используется нелинейно-упругая модель Мурнагана. Благодаря введению упругой кубической нелинейности данная модель позволяет описать зависимость скоростей упругих волн от величины статической деформации, которая наблюдается экспериментально и получила название акустоупругого эффекта. Однако классическая теория акустоупругости не учитывает влияние на скорости волн целого ряда факторов, в числе которых – влияние вязкости и вязкой диссипации.

Целью данной работы является разработка новых моделей акустоупругости, учитывающих влияние вязкости посредством использования многокомпонентных реологических моделей.

Методы

В качестве основы рассмотрена линейная модель Кельвина-Фойгта, описывающая поведение линейной вязкоупругой среды под одноосной нагрузкой:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \qquad (1)$$

где σ – суммарное напряжение, σ_1 – напряжение упругой составляющей, σ_2 – напряжение вязкой составляющей, ε – величина упругой деформации, $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$ – скорость изменения деформации, E – модуль Юнга, η – вязкость.

Многоэлементные модели образуются последовательным или параллельным соединением элементов Ньютона (демпфер «N» - вязкая составляющая) и Гука (пружина «H» - упругая составляющая).

Для описания акустоупругого эффекта в области упругих деформаций в модель вводится нелинейность. В качестве примера рассмотрена нелинейная пружина:

$$\sigma_1(t) = \mathrm{E}_0\varepsilon + \frac{1}{2}\mathrm{E}_1\varepsilon^2 + \frac{1}{6}\mathrm{E}_2\varepsilon^3 = f(\varepsilon), \qquad (2)$$

где E_0 – линейный модуль, E_1 – квадратичный модуль, E_2 – кубический модуль.

Рассмотрим движение продольной волны вдоль стержня. Одномерное уравнение сплошной среды с плотностью ρ, следующее из 2-го закона Ньютона, имеет вид:

$$\frac{d\sigma}{dx} = \rho\frac{d^2u}{dt^2}, \qquad (3)$$

где $u = u(x,t)$ – вектор смещения малого объёма вдоль оси стержня, ρ – плотность среды, x – координата смещения вдоль оси стержня.

Продольная волна представлена в виде плоской гармонической волны:

$$\tilde{u} = e^{j(kx-\omega t)}, \qquad (4)$$

где k – волновое число, ω – циклическая частота.

Поиск зависимостей фазовой и групповой скоростей от деформации осуществлен по соотношениям:

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{\beta}, \qquad v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\beta}. \qquad (5)$$

Результаты

Из системы уравнений (1-5) получены следующие зависимости:

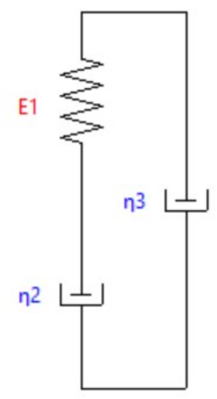
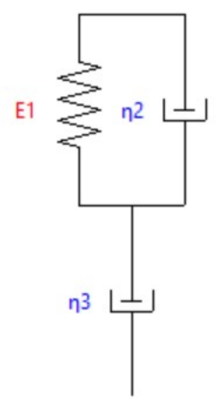
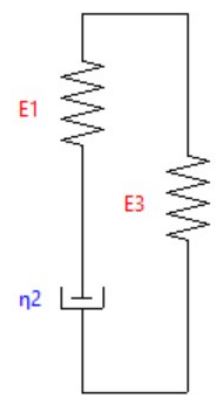
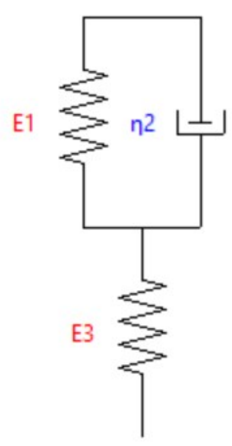
$$v_{\text{ф}} = \left(\sqrt{\left(\frac{\rho}{2}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{f'(\varepsilon_0)^2+\eta^2\omega^2}\right)+f'(\varepsilon_0)}{2\left(f'(\varepsilon_0)^2+\eta^2\omega^2\right)}}\right)^{-1},$$

$$v_{\text{гр}} = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)\cdot\left(1-\omega^2\eta^2\left[\frac{\left(\sqrt{f'^{(\varepsilon_0)^2}+\eta^2\omega^2}\right)+2f'^{(\varepsilon_0)}}{\left(f'^{(\varepsilon_0)^2}+\eta^2\omega^2\right)^2}\right]\right)^{-1}.$$

Скорости волн являются не только функциями от величины статической деформации ε_0, но и от вязкости материала, что отражает наблюдаемые экспериментально эффекты.

В таблице 1 представлены более сложные, многокомпонентные реологические модели, для которых были найдены схожие соотношения.

Таблица 1 – Многокомпонентные линейные вязко-упругие модели

Символьное обозначение и рисунок	Дифференциальное уравнение
$(H-N)\|N$ 	$\dot{\sigma}\left(\frac{1}{E_1}\right)+\sigma\left(\frac{1}{\eta_2}\right)=\ddot{\varepsilon}\left(\frac{\eta_3}{E_1}\right)+\dot{\varepsilon}\left(1+\frac{\eta_3}{\eta_2}\right)$
$(H\|N)-N$ 	$\dot{\sigma}\left(1+\frac{\eta_2}{\eta_3}\right)+\sigma\left(\frac{E_1}{\eta_3}\right)=\ddot{\varepsilon}(\eta_2)+\dot{\varepsilon}(E_1)$
$(H-N)\|H$ 	$\dot{\sigma}\left(\frac{1}{E_1}\right)+\sigma\left(\frac{1}{\eta_2}\right)=\dot{\varepsilon}\left(1+\frac{E_3}{E_1}\right)+\varepsilon\left(\frac{E_3}{\eta_2}\right)$
$(H\|N)-H$ 	$\dot{\sigma}\left(\frac{\eta_2}{E_3}\right)+\sigma\left(1+\frac{E_1}{E_3}\right)=\dot{\varepsilon}(\eta_2)+\varepsilon(E_1)$

Благодарности

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда № 25-29-01480.